ある堅非拡大型写像の族に関する収縮定理 (バナッハ空間論の研究とその周辺)

青山, 耕治

数理解析研究所講究録
第 1753 巻 2011 年 152-161

Strong convergence theorems for a family of firmly nonexpansive type mappings
ある堅非拡大型写像の族に関する収束定理

千葉大学・法経学部 青山 耕治 (Koji AOYAMA)
Faculty of Law and Economics
Chiba University

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H09, 47H10, 41A65.
Keywords and phrases. 堅非拡大型写像, P 型写像, 距離射影, 極大単調作用素, リゾルベント.

1 序論

本稿では, 文献 [5] で得られた結果を紹介する。文献 [5] では, ある堅非拡大型 (P 型) 写像の族に関する収束定理をいくつか証明した。Hilbert 空間上の堅非拡大 (firmly nonexpansive) 写像の Banach 空間への自然な拡張の一が P 型写像であり, Banach 空間の閉凸部分集合の上への距離射影 (metric projection) は P 型写像であることが知られている。

文献 [5] に関連する先行研究として, [12], [11] および [19] が特に重要である。文献 [12] では, 極大単調作用素の零点問題に対して, ハイブリッド法 (hybrid method) による強収束定理が得られた。文献 [11] では, 極大単調作用素の零点が存在するための十分条件と共に [12] の結果の一般化が得られた。文献 [19] では, 均衡問題に対して, [22] で導入された縮小射影法 (shrinking projection method) による存在定理および収束定理が得られた。これらの先行研究の結果, 特に収束定理の部分を包括的に議論しようとする試みからまとめたものが今回紹介する文献 [5] である。

2 準備

本稿では, $\mathbb{N}$ を正の整数全体の集合, E を実 Banach 空間, E^* を E の共役空間とし, E のノルムを $\|\cdot\|$ で, $x \in E$ における $x^* \in E^*$ の値を $\langle x, x^* \rangle$ で, E 上の恒等写像を I で, E 上の双対写像を J で表す。また, E の点列 $\{x_n\}$ が x へ強収束することを $x_n \to x$, 弱収束することを $x_n \rightharpoonup x$ と表す。E のノルムの微分可能性および E の凸性の定義, J の

諸性質についての詳細は, 文献 [20, 21] を参照するとよい。

以下, 特に断らない限り, E を滑らか (smooth), 狭義凸 (strictly convex) かつ回帰的 (reflexive) な Banach 空間とし, C を E の空でない部分集合とする。

C が閉凸集合のとき, 各 $x \in E$ に対して, $\|x - z\| = \min\{\|x - y\| : y \in C\}$ を満たす $z \in C$ がただ一つ存在する。その点 z を $P_C(x)$ と表し, P_C を E から C の上への距離射影 (metric projection) と呼ぶ。

E から E^* への作用素 (多価写像)A を $E \times E^*$ の部分集合と同一視し, $A \subset E \times E^*$ と表す。作用素 $A \subset E \times E^*$ が単調であるとは, すべての $(x, x^*), (y, y^*) \in A$ に対して $\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$ が成り立つときをいう。単調作用素 A が極大であるとは, $B \subset E \times E^*$ が単調で $A \subset B$ ならば, $A = B$ が成り立つときをいう。$A \subset E \times E^*$ を単調作用素とするとき, すべての $r > 0$ に対して $\left(I + rJ^{-1}A\right)^{-1}$ は一価写像になることが知られている。さらに, A が極大単調ならば, $\left(I + rJ^{-1}A\right)^{-1}$ は E 全体で定義されることが知られている。ここで, J^{-1} は E^* の双対写像である。写像 $\left(I + rJ^{-1}A\right)^{-1}$ は A のリゾルベント (resolvent) と呼ばれ, 本稿では K_r と表す。リゾルベント K_r は, 単調作用素の零点の近似理論, 例えば近接点法 (proximal point method) において重要な役割を演ずる。詳しくは, [12, 17, 21] を参照するとよい。

写像 $S\colon C \to E$ が P 型であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\langle Sx - Sy, J(x - Sx) - J(y - Sy) \rangle \geq 0$$

が成り立つときをいう。E が Hilbert 空間のとき J は恒等写像であるから, P 型写像は Hilbert 空間上の堅非拡大写像[*1]の一般化である。さらに, 次のことが知られている。詳しくは, [4] を参照するとよい。

- 閉凸集合 C の上への距離射影 P_C は P 型である。
- すべての $r > 0$ に対して, 極大単調作用素 $A \subset E \times E^*$ のリゾルベント $K_r = \left(I + rJ^{-1}A\right)^{-1}$ は P 型である。
- 写像 $S\colon C \to E$ が P 型ならば, S はある単調作用素 $A \subset E \times E^*$ のリゾルベント $\left(I + J^{-1}A\right)^{-1}$ である。

写像 $T\colon C \to E$ の不動点 (fixed point) の集合を $F(T)$ で, 漸近的不動点 (asymptotic fixed point) の集合を $\hat{F}(T)$ で表す。ここで, 点 $p \in C$ が写像 T の漸近的不動点であると

[*1] C を実 Hilbert 空間 H の空でない部分集合とするとき, $V\colon C \to H$ が堅非拡大であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して $\langle x - Vx - (y - Vy), Vx - Vy \rangle \geq 0$ が成り立つときをいう。

は, $x_n \rightharpoonup p$ かつ $x_n - Tx_n \to 0$ が成り立つ C の点列 $\{x_n\}$ が存在するときをいう。P 型写像について, さらに次の結果が知られている。

補助定理 2.1 ([5, Lemma 2.2]). $S\colon C \to E$ を P 型写像とするとき, 以下が成り立つ。

1. C が閉凸ならば, $F(S)$ も閉凸である。
2. $\hat{F}(S) = F(S)$ が成り立つ。
3. $\lambda \in [0,1]$ ならば, $\lambda I + (1-\lambda)S$ も P 型写像である。

$\{T_n\}$ を C から E への写像列とし, $\{T_n\}$ は共通不動点を持つ, つまり, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ は空ではないとする。E の点列 $\{x_n\}$ の弱収束部分列の極限 (weak cluster point または weak subsequential limit) の全体の集合を $\omega_{\mathrm{w}}(\{x_n\})$ で表す。つまり

$$\omega_{\mathrm{w}}(\{x_n\}) = \{z \in E : \{x_n\} \text{ の部分列 } \{x_{n_i}\} \text{ が存在して } x_{n_i} \rightharpoonup z\}$$

である。このとき

- $\{T_n\}$ が条件 (Z1) を満たすとは, $x_n - T_n x_n \to 0$ となる C の有界点列 $\{x_n\}$ に対して, $\omega_{\mathrm{w}}(\{x_n\}) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ が成り立つときをいう。
- $\{T_n\}$ が条件 (Z2) を満たすとは, $x_n - x_{n+1} \to 0$ かつ $x_n - T_n x_n \to 0$ となる C の有界点列 $\{x_n\}$ に対して, $\omega_{\mathrm{w}}(\{x_n\}) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ が成り立つときをいう。

$\{T_n\}$ が条件 (Z1) を満たせば, 条件 (Z2) を満たすことは定義より明らかである。

この節の最後に, 条件 (Z1) または (Z2) を満たす写像列の例をいくつか述べる。

補助定理 2.2 ([5, Lemma 2.3]). C を閉凸集合, $S\colon C \to E$ を P 型写像, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $S_n = S$ として写像列 $\{S_n\}$ を定義し, $F(S) \neq \emptyset$ を仮定する。このとき, $\{S_n\}$ は条件 (Z1) を満たす。

補助定理 2.3 ([5, Lemma 2.4]). $A \subset E \times E^*$ を極大単調作用素, $\{r_n\}$ を正の実数列とし, $A^{-1}0 \neq \emptyset$ および $\inf_n r_n > 0$ を仮定する。このとき, A のリゾルベントの列 $\{K_{r_n}\}$ は条件 (Z1) を満たす。

補助定理 2.4 ([5, Lemma 2.5]). $\{S_n\}$ を C から E への写像列, $\{\alpha_n\}$ を実数列とし, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(S_n) \neq \emptyset$ および $\sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n < 1$ を仮定する。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, 写像 $T_n\colon C \to E$ を $T_n = \alpha_n I + (1-\alpha_n)S_n$ で定義する。もし, $\{S_n\}$ が条件 (Z1) を満たすならば $\{T_n\}$ も (Z1) を, もし, $\{S_n\}$ が条件 (Z2) を満たすならば $\{T_n\}$ も (Z2) を満たす。

3 P 型写像列に関する強収束定理

本節では, E を滑らかで一様凸 (uniformly convex) な Banach 空間, C を E の空でない閉凸部分集合, $\{T_n\}$ を C から C への P 型写像の列とし, $\{T_n\}$ の共通不動点の近似に関する二つの結果 (収束定理) を述べる。

一つ目は, ハイブリッド射影法 (hybrid projection method) による収束定理である。

定理 3.1 ([5, Theorem 3.2]). $\{T_n\}$ の共通不動点の集合 $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ は空ではなく, $\{T_n\}$ は条件 (Z2) を満たすとする。x を E の任意の点とし, C の点列 $\{x_n\}$ を, $x_1 = P_C(x)$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} C_n = \{z \in C : \langle T_n x_n - z, J(x_n - T_n x_n)\rangle \geq 0\}; \\ D_n = \{z \in C : \langle x_n - z, J(x - x_n)\rangle \geq 0\}; \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x) \end{cases}$$

で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は $P_F(x)$ に強収束する。

二つ目は, [22] で導入された縮小射影法による収束定理である。

定理 3.2 ([5, Theorem 3.5]). $\{T_n\}$ の共通不動点の集合 $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ は空ではなく, $\{T_n\}$ は条件 (Z2) を満たすとする。x を E の任意の点とし, C の点列 $\{x_n\}$ を, $C_1 = C$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} x_n = P_{C_n}(x); \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \langle T_n x_n - z, J(x_n - T_n x_n)\rangle \geq 0\} \end{cases}$$

で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は $P_F(x)$ へ強収束する。

定理 3.1 と定理 3.2 では点列構成方法は異なるが, 証明の一部分を共通化することができる。実際, 両定理の証明の後半は, 次の補助定理によって完了する。

補助定理 3.3. $\{M_n\}$ と $\{N_n\}$ を E の空でない閉凸部分集合列, x を E の点, $\{x_n\}$ を E の点列とし, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n = P_{N_n}(x)$, $x_{n+1} \in N_n$, および $x_{n+1} = P_{M_n}(x)$ であり, $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n \neq \emptyset$ であると仮定する。このとき, 次が成り立つ。

- $\{x_n\}$ は有界である。
- $\{\|x_n - x\|\}$ は収束し, $x_{n+1} - x_n \to 0$ である。

- F が E の空でない閉凸部分集合で $F \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ かつ $\omega_{\mathrm{w}}(\{x_n\}) \subset F$ ならば, $\{x_n\}$ は $P_F(x)$ へ強収束する。

この補助定理は, [3, Lemma 3.1] の一般化である。また, この補助定理の距離射影を一般化射影 (generalized projection) に置き換えても同様な結論が得られる [2, Lemma 4.1]。

4 応用

本節では, 前節の定理 3.1 と 3.2 から導かれる結果を述べる。以下, E を滑らかで一様凸な Banach 空間, C を E の空でない閉凸部分集合とする。

4.1 極大単調作用素の零点問題

ここでは, 極大単調作用素 $A \subset E \times E^*$ の零点問題, つまり

$$0 \in Az$$

となる $z \in E$ を求める問題を考える。この問題の解 (A の零点) の集合を $A^{-1}0$ で表す。r を正の実数とし, K_r を A のリゾルベントとするとき, $F(K_r) = A^{-1}0$ が成り立つから, A の零点問題をリゾルベント K_r の不動点問題とみなすことができる。

定理 3.1 から, 次の系が得られる。

系 4.1 ([11, Theorem 3.1]). $A \subset E \times E^*$ を極大単調作用素, $\{\alpha_n\}$ を $[0,1)$ の数列, $\{r_n\}$ を正の数列とし, $A^{-1}0 \neq \emptyset$, $\sup_n \alpha_n < 1$, および $\inf_n r_n > 0$ を仮定する。x を E の任意の点, 点列 $\{x_n\}$ を, $x_1 = x$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) K_{r_n} x_n; \\ C_n = \{z \in E : \langle y_n - z, J(x_n - y_n) \rangle \geq 0\}; \\ D_n = \{z \in E : \langle x_n - z, J(x - x_n) \rangle \geq 0\}; \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x) \end{cases}$$

で定義する。ここで, $K_{r_n} = \left(I + r_n J^{-1} A\right)^{-1}$ である。このとき, $\{x_n\}$ は $P_{A^{-1}0}(x)$ へ強収束する。

証明. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $T_n = \alpha_n I + (1-\alpha_n) K_{r_n}$ とおく。すると, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $F(T_n) = F(K_{r_n}) = A^{-1}0$ であるから, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) = A^{-1}0$ は空ではない。補助定理 2.1 により T_n は P 型であるから, 補助定理 2.3 および 2.4 により, $\{T_n\}$ は (Z1) を満たす。したがって, 定理 3.1 より結論を得る。 □

同様にして, 定理 3.2 から, 次の系が得られる。

系 4.2. $A \subset E \times E^*$ を極大単調作用素, $\{\alpha_n\}$ を $[0,1)$ の数列, $\{r_n\}$ を正の数列とし, $A^{-1}0 \neq \emptyset$, $\sup_n \alpha_n < 1$, および $\inf_n r_n > 0$ を仮定する。x を E の任意の点とし, 点列 $\{x_n\}$ を, $C_1 = E$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} x_n = P_{C_n}(x); \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) K_{r_n} x_n; \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \langle y_n - z, J(x_n - y_n) \rangle \geq 0\} \end{cases}$$

で定義する。ここで, $K_{r_n} = (I + r_n J^{-1} A)^{-1}$ である。このとき, $\{x_n\}$ は $P_{A^{-1}0}(x)$ へ強収束する。

4.2 均衡問題

ここでは, $f\colon C \times C \to \mathbb{R}$ に関する均衡問題, つまり

$$\text{すべての } y \in C \text{ に対して } f(z,y) \geq 0$$

となる $z \in C$ を求める問題を考える。そのような $z \in C$ を均衡問題の解といい, 解の集合を $\mathrm{EP}(f)$ で表す。以下, 関数 $f\colon C \times C \to \mathbb{R}$ は次の条件を満たすと仮定する*2。

(F1) すべての $x \in C$ に対して $f(x,x) = 0$ である。
(F2) すべての $x, y \in C$ に対して $f(x,y) \leq -f(y,x)$ である。
(F3) すべての $x \in C$ に対して $f(x,\cdot)\colon C \to \mathbb{R}$ は凸かつ下半連続関数である。
(F4) 各 $(x, x^*) \in C \times E^*$ に対して

$$\langle z - x, x^* \rangle \geq f(z,x)\,(\forall z \in C) \text{ ならば } f(x,y) + \langle y - x, x^* \rangle \geq 0\,(\forall y \in C)$$

が成り立つ。

これらの仮定のもとで, [19, Theorem 2.3]*3より, $x \in E$ と $r > 0$ に対して

$$F_r(x) = \left\{ z \in C : f(z,y) + \frac{1}{r} \langle y - z, J(z - x) \rangle \geq 0, \forall y \in C \right\} \tag{4.1}$$

*2 これらの仮定を満たす f の例については, [6] とその参考文献を参照するとよい。
*3 合わせて [1] および [8] も参照するとよい。

は一点集合であることが知られている。したがって, 式 (4.1) で定義される F_r は, E から C への 1 価写像と考えることができる。この F_r を f のリゾルベントと呼ぶ。また, $F(F_r) = \mathrm{EP}(f)$ であることが容易に確かめられるから, f に関する均衡問題を F_r の不動点問題とみなすことができる。

さらに, 均衡問題を 4.1 で取り上げた極大単調作用素の零点問題に書き換えることが可能である。実際, [1, Theorem 3.5] より

$$A_f(x) = \begin{cases} \{x^* \in E^* : f(x,y) \geq \langle y - x, x^* \rangle, \forall y \in C\} & (x \in C); \\ \emptyset & (x \notin C) \end{cases} \tag{4.2}$$

で定義される E から E^* への作用素 A_f は極大単調であり, $\mathrm{EP}(f) = (A_f)^{-1}0$ となることが知られている。したがって, 次の補助定理を得る。

補助定理 4.3. $A_f \subset E \times E^*$ を (4.2) で定義される極大単調作用素とし, $r > 0$ とする。このとき, f のリゾルベント F_r と A_f のリゾルベント $\left(I + rJ^{-1}A_f\right)^{-1}$ は一致する。

証明. 式 (4.1) から, すべての $x \in E$ および $y \in C$ に対して

$$f(F_r(x), y) \geq \left\langle y - F_r(x), \frac{1}{r} J(x - F_r(x)) \right\rangle$$

が成り立つ。$F_r(x) \in C$ であるから

$$\frac{1}{r} J(x - F_r(x)) \in A_f(F_r(x))$$

となる。したがって, すべての $x \in C$ に対して $\left(I + rJ^{-1}A_f\right)^{-1} x = F_r(x)$ である。 □

系 4.2 および補助定理 4.3 によって次の定理が得られる。

定理 4.4. $\{\alpha_n\}$ を $[0,1)$ の数列, $\{r_n\}$ を正の実数列とし, $\sup_n \alpha_n < 1$ および $\inf_n r_n > 0$ を仮定する。x を E の任意の点とし, E の点列 $\{x_n\}$ を, $C_1 = E$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} x_n = P_{C_n}(x); \\ y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) F_{r_n} x_n; \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \langle y_n - z, J(x_n - y_n) \rangle \geq 0\} \end{cases}$$

で定義する。ここで, F_{r_n} は (4.1) で定義される f のリゾルベントである。このとき, $\{x_n\}$ は $P_{\mathrm{EP}(f)}(x)$ に強収束する。

証明. $A_f \subset E \times E^*$ を (4.2) で定義される作用素とする。すると, $\mathrm{EP}(f) = (A_f)^{-1}0$ であり, A_f は極大単調である。また, 補助定理 4.3 により, すべての $r > 0$ に対して $F_r = (I + rJ^{-1}A_f)^{-1}$ である。したがって, 系 4.2 より結論を得る。 □

定理 4.4 において, $\alpha_n \equiv 0$ とした場合が [19, Theorem 3.2] である。

4.3 P 型写像の不動点問題

ここでは, P 型写像 $S\colon C \to C$ の不動点問題, つまり

$$z = Sz$$

となる $z \in C$ を求める問題を考える。

定理 3.1 から, 次の結果が得られる。

系 4.5. $S\colon C \to C$ を P 型写像, $\{\alpha_n\}$ を $[0,1)$ の数列とし, $F(S) \neq \emptyset$ および $\sup_n \alpha_n < 1$ を仮定する。x を E の任意の点とし, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = P_C(x)$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Sx_n; \\ C_n = \{z \in C : \langle y_n - z, J(x_n - y_n)\rangle \geq 0\}; \\ D_n = \{z \in C : \langle x_n - z, J(x - x_n)\rangle \geq 0\}; \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x) \end{cases}$$

で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は $P_{F(S)}(x)$ へ強収束する。

証明. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $T_n = \alpha_n I + (1-\alpha_n)S$ とおく。すると, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $F(T_n) = F(S)$ となり, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) = F(S) \neq \emptyset$ である。補助定理 2.1, 2.2 および 2.4 より, 各 $T_n\colon C \to C$ は P 型で $\{T_n\}$ は条件 (Z1) を満たすことがわかる。したがって, 定理 3.1 より結論を得る。 □

同様にして, 定理 3.2 より, 次の結果も得られる。

系 4.6. $S\colon C \to C$ を P 型写像, $\{\alpha_n\}$ を $[0,1)$ の数列とし, $F(S) \neq \emptyset$ および $\sup_n \alpha_n < 1$ を仮定する。x を E の任意の点とし, 点列 $\{x_n\}$ を $C_1 = C$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} x_n = P_{C_n}(x); \\ y_n = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Sx_n; \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \langle y_n - z, J(x_n - y_n)\rangle \geq 0\} \end{cases}$$

で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は $P_{F(S)}(x)$ へ強収束する。

参考文献

[1] K. Aoyama, Y. Kimura, and W. Takahashi, *Maximal monotone operators and maximal monotone functions for equilibrium problems*, J. Convex Anal. **15** (2008), 395–409.

[2] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Strong convergence theorems by shrinking and hybrid projection methods for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear analysis and convex analysis, Yokohama Publ., Yokohama, 2009, pp. 7–26.

[3] ______, *Shrinking projection methods for firmly nonexpansive mappings*, Nonlinear Anal. **71** (2009), e1626–e1632.

[4] ______, *Three generalizations of firmly nonexpansive mappings: Their relations and continuity properties*, J. Nonlinear Convex Anal. **10** (2009), 131–147.

[5] ______, *Strong convergence theorems for a family of mappings of type (P) and applications*, Nonlinear Analysis and Optimization, Yokohama Publ., Yokohama, 2009, pp. 1–17.

[6] 青山耕治，高橋渉，『不動点問題と均衡問題の共通解への収束定理』, 非線形解析学と凸解析学の研究, 京都大学数理解析研究所講究録 **1544** (2007), 40–48.

[7] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, *Construction of best Bregman approximations in reflexive Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 3757–3766.

[8] E. Blum and W. Oettli, *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Math. Student **63** (1994), 123–145.

[9] R. E. Bruck Jr., *Nonexpansive projections on subsets of Banach spaces*, Pacific J. Math. **47** (1973), 341–355.

[10] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Existence and approximation of fixed points of firmly nonexpansive-type mappings in Banach spaces*, SIAM J. Optim. **19** (2008), no. 2, 824–835.

[11] S. Matsushita and W. Takahashi, *A proximal-type algorithm by the hybrid method for maximal monotone operators in a Banach space*, Nonlinear analysis and convex analysis, Yokohama Publ., Yokohama, 2007, pp. 355–365.

[12] S. Ohsawa and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for resolvents of max-*

imal monotone operators in Banach spaces, Arch. Math. (Basel) **81** (2003), 439–445.

[13] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 178, Dekker, New York, 1996, pp. 313–318.

[14] R. T. Rockafellar, *Characterization of the subdifferentials of convex functions*, Pacific J. Math. **17** (1966), 497–510.

[15] ———, *On the maximal monotonicity of subdifferential mappings*, Pacific J. Math. **33** (1970), 209–216.

[16] ———, *On the maximality of sums of nonlinear monotone operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 75–88.

[17] ———, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optimization **14** (1976), 877–898.

[18] M. V. Solodov and B. F. Svaiter, *Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space*, Math. Program. **87** (2000), 189–202.

[19] H. Takahashi and W. Takahashi, *Existence theorems and strong convergence theorems by a hybrid method for equilibrium problems in Banach spaces*, Fixed Point theory and its Applications, Yokohama Publ., Yokohama, 2008, pp. 163–174.

[20] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[21] ———, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000 (Japanese).

[22] W. Takahashi, Y. Takeuchi, and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 276–286.